UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR FAZOSIDA PSEVDOTEKIS TOPOLOGIYA

Ruziyev J.E,
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti,
Ahmadova M.G'.
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada dastlab, $(\mathbb{R}, \tau_{tabiiy})$ topologik fazoda yaqinlashish va tekis yaqinlashish tushunchalari va μ baza kiritiladi. So'ngra $\mathbb{R}$ da uzluksiz hamda μ da tekis yaqinlashuvchi akslantirishlar fazosini $C_{\mu,u}(\mathbb{R})$ deb belgilab, ushbu fazoning Tixonov fazosi bo'lishi isbotlanadi.

Kalit so'zlar: Toplogik fazo, tabiiy topologiya, baza, uzluksiz, tekis yaqinlashish, atrof, Hausdorf fazosi, Tixonov fazosi.

$(\mathbb{R}, \tau_{tabiiy})$ topologik fazoda $\mu = \{O_{\frac{1}{n}}(r):\ r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$ ochiq atroflar oilasi berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqda tabiiy topologiya intervallar orqali aniqlanadi.

1-ta'rif. $(\mathbb{R}, \tau)$ topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'plamini μ oilaga tegishli to'plamlar birlashmasi sifatida ifodalash mumkin bo'lsa, μ oilaga $(\mathbb{R}, \tau)$ topologik fazoning bazasi deb ataladi.

2-ta'rif. Bizga E to'plamda aniqlangan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ketma-ketlik va f funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $N(\varepsilon)$ natural son topilib, barcha $n \geq N(\varepsilon)$ va ixtiyoriy $x \in E$ uchun $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ketma-ketlik E to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

3-ta'rif. Bizga X, Y topologik fazolar, $f: X \to Y$ akslantirish va $x \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y = f(x)$ nuqtaning ixytiyoriy V atrofi uchun x nuqtaning U atrofi mavjud bo'lib, $U \subset f^{-1}(V)$ munosabat bajarilsa $f: X \to Y$ akslantirish x nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'kidlash lozimki, $f: X \to Y$ akslantirish X ning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz bo'lsa, ushbu akslantirish X da uzluksiz deyiladi va X dagi barcha uzluksiz akslantirishlar to'plami $C(X,Y)$ kabi belgilanadi. Barcha uzluksiz $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalar to'plamini $C(\mathbb{R})$ kabi belgilaymiz.

Berilgan $\varepsilon > 0$ son va $A \in \mu$ uchun quyidagi to'plamni kiritamiz:

$$A_\varepsilon := \{(f,g) \in C(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, x \in A\}.$$

$\{A_\varepsilon :\ A \in \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}$ to'plamlar sistemasi $C(\mathbb{R})$ da tekis yaqinlashishlar uchun baza bo'lishini oson isbotlash mumkin.

4-ta'rif. Tekis yaqinlashish orqali hosil qilingan topologiya μ da tekis yaqinlashish topologiyasi deb ataladi va hosil bo'lgan fazo $C_{\mu,u}(\square)$ kabi belgilanadi, ya'ni $\square$ da uzluksiz hamda μ da tekis yaqinlashuvchi akslantirishlar fazosi.

Berilgan $f \in C(\square)$, $A \subseteq \square$ va $\varepsilon > 0$ uchun

$$V(f, A, \varepsilon) := \{g \in C(\square) : \left| f(x) - g(x) \right| < \varepsilon,\ x \in A\}$$

to'plamni qaraylik. U holda har bir $f \in C(\square)$ uchun $\{V(f, A, \varepsilon) : A \in \mu, \varepsilon > 0\}$ oila $C_{\mu,u}(\square)$ uchun f da ochiq atroflar bazasini tashkil qiladi.

Teorema. $C_{\mu,u}(\square)$ - Tixonov fazosi bo'ladi.

Isbot. $C_{\mu,u}(\square)$ Tixonov fazosi ekanligini isbotlashda $\bigcup \mu$ birlashma $\square$ da zich ekanligidan foydalanamiz. $C_{\mu,u}(\square)$ tixonov bo'lishi uchun uning to'la regulyar va Hausdorf fazo bo'lishini ko'rsatamiz. To'la regulyar ekanligi $C_{\mu,u}(\square)$ ning topologiyasi tekis yaqinlashish orqali qurilganligidan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $\bigcup \mu$ birlashma $\square$ da zich va $f, g \in C_{\mu,u}(\square)$ funksiyalar $f \neq g$ shartni qanoatlantirsin. Belgilangan $z \in \square$ nuqtada $f(z) \neq g(z)$ va $\varepsilon := \dfrac{\left| f(z) - g(z) \right|}{4}$ bo'lsin. U to'plam esa z nuqtaning $\left| f(x) - g(x) \right| > 2\varepsilon$ (barcha $x \in U$) shartni qanoatlantiruvchi ochiq atrofi bo'lsin.

$\bigcup \mu$ birlashma $\square$ da zich bo'lganligidan $A \in \mu$ uchun shunday $y \in A \cap U$ element topiladi. Agar $h \in V(f, A, \varepsilon) \cap V(g, A, \varepsilon)$ bo'lsa, $\left| f(y) - h(y) \right| < \varepsilon$ va $\left| g(y) - h(y) \right| < \varepsilon$ tengsizliklar hosil bo'ladi. Bundan

$$\left| f(y) - g(y) \right| = \left| f(y) - h(y) + h(y) - g(y) \right| < 2\varepsilon$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa $y \in U$ tasdiqga ziddir. Demak, $C_{\mu,u}(\square)$ Hausdorf fazosi bo'ladi. Faraz qilaylik, $\bigcup \mu$ birlashma $\square$ da zich emas. Belgilangan $z \in \square \setminus \overline{\bigcup \mu}$ nuqta va $f(z) = 1$ va $f(\overline{\bigcup \mu}) = \{0\}$ shartni qanoatlantiruvchi $f \in C(\square)$ funksiya olamiz. U holda barcha $A \in \mu$ va $\varepsilon > 0$ uchun $f \in V(0, A, \varepsilon)$ ekanligidan $C_{\mu,u}(\square)$ Hausdorf fazosi bo'lmasligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. A.Ya.Narmanov, "Differensial Geometriya". T.: Universitet, 2012.
2. A.D.Rojas-Sánchez, Á.Tamariz-Mascarúa, H.Villegas-Rodríguez, "On the pseudouniform topology on C(X)". Topology and its applications #304, 2021.
3. Р.Энгелькинг, Общая топология, Москва, Мир, 1986.
4. Ю.В.Садовничий, Р.Б.Бешимов, Т.Ф.Жураев, Топология. Ташкент, Университет, 2021.