YARIM TEKISLIKLAR MINKOVSKIY AYIRMASI

Nuritdinov J.T.
Qo‘qon universiteti “Raqamli texnologiyalar va matematika” kafedrasi o‘qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqolada geometrik to‘plamlar ustida bajariladigan Minkoskiy ayirmasi va yig‘indisi amallari yoritilgan. Yarim tekisliklarning Minkovskiy ayirmsini va yig‘indisini topish qoidalari va usullari teorema ko‘rinishida keltirilgan va isbot etilgan.

Kalit so‘zlar: yarim tekisliklar, to‘g‘ri chiziqlar, Minkovskiy ayirmasi, Minkovskiy yig‘indisi, parallel ko‘chirish

Tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziq uni qavariq ikki sohaga ajratadi. Bu sohalarning birini yarim tekislik deb ataymiz. Shunday yarim tekisliklarning Minkowski ayirmasi va yig‘indisi haqida fikr yuritish mumkin. [1],[2] ishlarda to‘g‘ri chiziqlar Minkovskiy yig‘indisi va Minkovskiy ayirmasi haqida ma’lumotlar keltirilgan. Bulardan foydalanib yarim tekisliklar Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasini topish masalasini ko‘rib o‘tamiz.

1-teorema. Aytaylik $\overline{l_1}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge k_1x+b_1\}$ va $\overline{l_2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge k_2x+b_2\}$ to‘plamlar $\mathbb{R}^2$ da aniqlangan yarim tekisliklar bo‘lsin. Agar $k_1=k_2$ tenglik bajarilsa, u holda ularning Minkowskiy yig‘indisi $\overline{l_1}+\overline{l_2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge k_1x+b_1+b_2\}$ yarim tekislik bo‘ladi. Agar $k_1\ne k_2$ munosabat bajarilsa $\overline{l_1}+\overline{l_2}$ Minkovskiy yig‘indisi butun $\mathbb{R}^2$ tekislikdan iborat bo‘ladi.

Isbot. $k_1=k_2$ bo‘lsa $\overline{l_1}$ va $\overline{l_2}$ to‘plamlarning mos ravishda yasovchilari bo‘lgan, $l_1: y=k_1x+b_1$ va $l_2: y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib qoladi. [1, Proposition 3.1.] ga ko‘ra bu to‘g‘ri chiziqlarning Minkovskiy yig‘indisi yana shu to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. Demak, bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisienti ham k_1 ga teng bo‘lar ekan. $l_1: y=k_1x+b_1$ to‘g‘ri chiziqdan olingan ixtiyoriy nuqtaning koordinatasi $(x_1;k_1x_1+b_1),\ x_1\in\mathbb{R}$ ko‘rinishda va $l_2: y=k_1x+b_2$ (chunki $k_1=k_2$) to‘g‘ri chiziqdan olingan ixtiyoriy nuqtaning koordinatasi $(x_2;k_1x_2+b_2), x_2\in\mathbb{R}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu nuqtalarning Minkovskiy yig‘indisi

$$(x_1+x_2;k_1(x_1+x_2)+b_1+b_2) \quad (1)$$

ko‘rinishdagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘ladi. $x_1+x_2=t$ parameter kiritsak, (1) ifodani

$$(t;k_1t+b_1+b_2) \quad (2)$$

ko‘rinishda yoza olamiz. (2) ko‘rinishdagi nuqtalar to‘plami $l_1+l_2: y=k_1x+b_1+b_2$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. Bundan esa $\overline{l_1}$ va $\overline{l_2}$ yarim tekisliklarning Minkovskiy yig‘indisi $\overline{l_1}+\overline{l_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq k_1x+b_1+b_2\right\}$ ko‘rinishdagi yarim tekislikdan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Agar $k_1\neq k_2$ bo‘lsa, u holda $l_1: y=k_1x+b_1$ va $l_2: y=k_2x+b_2$ tog‘ri chizqlar o‘zaro parallel bo‘lmaydi. [1, Proposition 3.2.] ga ko‘ra bu to‘g‘ri chiziqlarning Minkovskiy yig‘indisi bu to‘g‘ri chiziqlar yotuvchi tekislik bo‘ladi, ya’ni $\mathbb{R}^2$.

Faraz qilaylik, $\overline{l_1}+\overline{l_2}\neq\mathbb{R}^2$ bo‘lsin. U holda shunday $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ nuqta topilib, $(x_0;y_0)\notin\overline{l_1}+\overline{l_2}$ bo‘ladi. $(x_0;y_0)\notin\overline{l_1}+\overline{l_2}$ munosabatning ma’nosi $x_0=x_1+x_2$ va $y_0=y_1+y_2$ tengliklarni qanoatlantiradigan $(x_1;y_1)\in\overline{l_1}$, $(x_2;y_2)\in\overline{l_2}$ nuqtalar topilmasligini bildiradi. Lekin $x_1\in\mathbb{R}$ va $x_2\in\mathbb{R}$ ekanligidan doimo $x_0=x_1+x_2$ tenglikni qanoatlantiradigan x_1,x_2 lar topiladi. Bundan $x_1=x_0-x_2$ yoza olamiz. $y_1\geq k_1x_1+b_1$ va $y_2\geq k_2x_2+b_2$ bo‘lgani uchun $y_1+y_2\geq k_1x_1+k_2x_2+b_1+b_2$ ifoda kelib chiqadi. Bu ifodaga $x_1=x_0-x_2$ ni qo‘ysak $y_1+y_2\geq k_1x_0+(k_2-k_1)x_2+b_1+b_2$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. $k_1\neq k_2$ bo‘lgani uchun har qanday $(x_0;y_0)\in\mathbb{R}^2$ nuqta olinmasin doim $y_0\geq k_1x_0+(k_2-k_1)x_2+b_1+b_2$ munosabat o‘rinli bo‘luvchi $x_2\in\mathbb{R}$ topiladi. Demak, $(x_0;y_0)\in\overline{l_1}+\overline{l_2}$ va $\overline{l_1}+\overline{l_2}=\mathbb{R}^2$. Demak, bu to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan yarim tekisliklar Minkovskiy yig‘indisi ham butun tekislikdan iborat bo‘lar ekan.□

2-teorema. Aytaylik $\overline{l_1}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq k_1x+b_1\right\}$ va $\overline{l_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq k_2x+b_2\right\}$ to‘plamlar $\mathbb{R}^2$ da aniqlangan yarim tekisliklar bo‘lsin. Agar $k_1=k_2$ tenglik bajarilsa, u holda ularning Minkowskiy ayirmasi $\overline{l_1}\overset{*}{-}\overline{l_2}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq k_1x+b_1-b_2\right\}$ yarim tekislik bo‘ladi. Agar $k_1\neq k_2$ munosabat bajarilsa $\overline{l_1}\overset{*}{-}\overline{l_2}$ Minkovskiy ayirmasi bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Isbot. Agar $k_1=k_2$ bo‘lsa $\overline{l_1}$ va $\overline{l_2}$ to‘plamlarning mos ravishda yasovchilari bo‘lgan, $l_1: y=k_1x+b_1$ va $l_2: y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib qoladi. [2, 1-teorema] ga ko‘ra bu chiziqlarning Minkowskiy ayirmasi shu to‘g‘ri chiziqlarga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

Aytaylik, $(x_0;y_0)\in\overline{l_1}\overset{*}{-}\overline{l_2}$ bo‘lsin. Minkovskiy ayirmasining ta’rifiga ko‘ra $(x_0;y_0)+\overline{l_2}\subset\overline{l_1}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. $(x_0;y_0)+\overline{l_2}$ to‘plam $\overline{l_2}$ to‘plamni $(x_0;y_0)$ nuqtaga parallel ko‘chirishdan hosil bo‘lgan to‘plam bo‘lib, uni $\overline{l_2}'$ orqali belgilaymiz va

$$\overline{l_2}'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq k_2(x-x_0)+b_2+y_0\right\} \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalaymiz. $\overline{l_2}' \subset \overline{l_1}$ bo'lgani uchun $\overline{l_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq k_1 x + b_1\}$ ekanligini bilgan holda

$$k_2(x - x_0) + b_2 + y_0 \geq k_1 x + b_1 \qquad (4)$$

tengsizlikni yoza olamiz. $k_1 = k_2$ bo'lgani uchun (4) munosabatni

$$y_0 \geq k_1 x_0 + b_1 - b_2 \qquad (5)$$

ko'rinishda yoza olamiz. Demak, $(x_0; y_0) \in \overline{l_1} \overset{*}{-} \overline{l_2}$ nuqtalar uchun (5) shart o'rinli ekan. Bundan esa $\overline{l_1}$ va $\overline{l_2}$ yarim tekisliklarning Minkovskiy ayirmasi $\overline{l_1} \overset{*}{-} \overline{l_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq k_1 x + b_1 - b_2\}$ ko'rinishdagi yarim tekislikdan iborat ekanligi kelib chiqadi.

$k_1 \neq k_2$ bo'lsin. $l_2 \subset \overline{l_2}$ to'g'ri chiziqni olaylik. Minkovskiy ayirmasi aniqlanishiga ko'ra $\overline{l_1} \overset{*}{-} l_2$ to'plam shunday nuqtalardan iborat bo'lishi kerakki, l_2 to'g'ri chiziqning bu nuqtalarga parallel ko'chirganimizdagi obrazi $\overline{l_2}$ yarim tekislikda to'la yotib qolishi lozim. $l_1 : y = k_1 x + b_1$ va $l_2 : y = k_2 x + b_2$ to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lmagani uchun bunday nuqtalar topilmaydi. Bu esa $\overline{l_1} \overset{*}{-} l_2 = \varnothing$ ekanini anglatadi. $l_2 \subset \overline{l_2}$ bo'lgani uchun $\overline{l_1} \overset{*}{-} \overline{l_2} = \varnothing$ munosabat ham o'rinli bo'ladi. □

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. D. Velichova. Notes on properties and applications of Minkowski point set operations// South Bohemia Mathematical Letters. 2016. Volume 24. №1. pp.57-71.
2. J.T. Nuritdinov. To'g'ri chiziq va tekisliklar Minkovskiy ayirmasi haqida.// Differential equations and related problems of analysis. Republican Scientific Conference with the participation of foreign scientists Bukhara, Uzbekistan, November 04–05, 2021