INTEGRO-DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Yo'ldashev Axrorjon
Qo'qon Universiteti Raqamli texnologiyalar va matematika kafedrasi o'qituvchisi,
Toshtemirov Bahodirjon
Qo'qon Universiteti Raqamli texnologiyalar va matematika kafedrasi dotsent. v.b

Annotatsiya: Integral differensial tenglama uchun chegaraviy masala differensial tenglamani ham, chegara shartlarini ham qanoatlantiradigan yechim topishni talab qiladi. Shartlar bir nuqtada berilgan boshlang'ich qiymat masalalaridan farqli o'laroq, chegaraviy masalalar bir nechta nuqtalarda o'rnatilgan shartlarga ega. Bunday muammolarni hal qilish ko'pincha o'zgaruvchilarni ajratish, Laplas transformatsiyasi yoki raqamli usullar kabi usullarni o'z ichiga oladi. Ushbu turdagi muammolar odatda fizika, muhandislik va boshqa fanlarda uchraydi, bu erda ma'lum cheklovlar ostida funktsiya yoki tizimning harakatini aniqlash kerak. Chegaraviy qiymat muammolari issiqlik uzatish, suyuqlik oqimi, elektr zanjirlari va struktura mexanikasi kabi ko'plab ilovalar uchun juda muhimdir.

Kalit so'zlar: Teorema, masala, regulyar, mantiq, differensial, Veyershtrasc.

Masala. Quyidagi

$$y''(x)-y'(x)-\lambda_1 y(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x y(\xi)\,d\xi = f(x), \quad x\in(0,1) \qquad (1)$$

integro-differensial tenglamaning

$$y(0)=y_0, \ \ y(1)=y_1 \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin, bu yerda $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Teorema. Agar $\lambda_2 \ge 0,\ \lambda_1 \le (\lambda_2/2)$ tengsizlik bajarilsa, {(1),(2)} masala bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. {(1),(2)} masala $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ funksiya ushbu bir jinsli masalani qanoatlantiradi:

$$y''(x)-y'(x)-\lambda_1 y(x)+\frac{\lambda_2}{2}\int_0^x y(\xi)\,d\xi = 0,\ x\in(0,1); \quad y(0)=y(1)=0. \qquad (3)$$

Faraz qilaylik (3) masala trivialmas $y(x)\not\equiv 0,\ x\in[0,1]$ yechimga ega bo'lsin. U holda Veyershtrasc teoremasiga asosan $\sup\limits_{x\in[0,1]}|y(x)|=|y(x_0)|=M>0,\ \ x_0\in[0,1]$ tenglik o'rinli. $y(0)=y(1)=0$ bo'lganligi uchun $x_0\in(0,1)$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $y(x)$ funksiya $x_0\in(0,1)$ nuqtada musbat maksimum (manfiy minimum) ga erishsin. U holda $y''(x)\big|_{x=x_0}\le 0(\ge 0)$, $y'(x_0)=0$ bo'lib, teorema shartlaridan kelib chiquvchi $\{\lambda_2\ge 0,\ \lambda_1<(\lambda_2/2)\}$ yoki $\{\lambda_2>0,\ \lambda_1\le(\lambda_2/2)\}$ tengsizliklar bajarilsa

$$\left\{ y''(x) - y'(x) + \left(\frac{\lambda_2 x}{2} - \lambda_1 \right) y(x) - \frac{\lambda_2}{2} \int_0^x [y(x) - y(\xi)] d\xi \right\} \Bigg|_{x=x_0} < 0 \; (>0)$$

tengsizlik ham o‘rinli bo‘ladi. Bu - (3) ning birinchi tengligiga zid. Demak, farazimiz noto‘g‘ri, ya’ni $y(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$. Bu tenglik $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ bo‘lganda (3) masaladan byevosita kelib chiqadi. Demak, $y_1(x) = y_2(x)$, $x \in [0,1]$. Teorema isbotlandi.

Masala yechimining mavjudligini ko‘rsatamiz. Buning uchun {(1),(2)} masalani $y(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagi

$$y(x) - \int_0^1 K(x,s) y(s) ds = f_1(x), \; x \in [0,1] \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi integral tenglamaga keltiriladi, bu yerda

$$K(x,s) = \begin{cases} \left[\lambda s^2 + (2\lambda_2 - 4\lambda_1) s + \lambda_2 - 4\lambda_1 - 4 \right] x/4, & x \le s; \\ \left[\lambda_2 s^2 - \lambda_2 x + 4\lambda_1 s - 4 \right] (x-1)/4, & s \le x, \end{cases}$$

$$f_1(x) = (1-x) \int_0^x s \, f(s) ds - x \int_x^1 (s-1) \, f(s) ds + [y_1 - y_0] x + y_0 .$$

(4) - ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasi bo‘lib, u yechimga ega bo‘lish ma’nosida {(1),(2)} masalaga ekvivalentdir. Shuning uchun uning yechimining mavjudligi {(1), (2)} masala yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. O‘rinov. A. Q. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. -Toshkent: MUMTOZ SO’Z, 2014.-164 b.

2. Yo‘ldashev, A. (2022). Ta’limda suniy intellektning imkoniyatlari. Academic research in educational sciences, 3(11), 726-729.

3. Yo’ldashev, A., & Solidjonov, D. (2022). Yangi innovatsion texnologiyalar va ularni ta’lim olish muhhitida