KOKAND UNIVERSITY HERALD
SCIENTIFIC E-JOURNAL

QO'QON UNIVERSITETI XABARNOMASI
KOKAND UNIVERSITY HERALD
ВЕСТНИК КОКАНДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN: 2181-1695 **OAK:** 01-08/1819/6 www.herald.kokanduni.uz

TOʻPLAMLAR USTIDA BAJARILADIGAN MINKOVSKIY AMALLARINI OʻQITISHNING ZAMONAVIY METODLARI

Nuritdinov Jalolxon Tursunboy oʻgʻli
Qoʻqon Davlat Pedagogika Instituti oʻqituvchisi
Tel: +99895081816. E-mail: nuritdinovjt@gmail.com
Tashxodjayev Abdugʻaffor Mansurjon oʻgʻli
Qoʻqon Universiteti oʻqituvchisi

MAQOLA HAQIDA

Qabul qilindi: 24-dekabr 2024-yil
Tasdiqlandi: 26-dekabr 2024-yil
Jurnal soni: 13
Maqola raqami: 42
DOI: https://doi.org/10.54613/ku.v13i.1052

KALIT SOʻZLAR/ КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА/ KEYWORDS

Minkovskiy yigʻindisi, Minkovskiy ayirmasi, ortogonal proyeksiya, Geogebra, parallel koʻchirish.

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolada Minkovskiy operatorlarining xususiy hollari boʻlgan toʻplamlar ustida bajariladigan Minkovskiy amallarini oʻqitishda qoʻllaniladigan zamonaviy pedagogik texnologiyalar va innovatsion yondashuvlar muhokama qilinadi. Tadqiqot ishida nazariy tahlil, lokal va nolokal differensial geometriya, qatlamalar topologiyasi, qatlamalar nazariyasi va dinamik sistemalar nazariyasining geometrik hamda topologik usullaridan foydalanilgan. Ushbu maqolada toʻgʻri chiziqda va tekislikda berilgan toʻplamlarning Minkovskiy yigʻindisi va ayirmasini hisoblashning turli usullari keltiriladi. Ushbu usullarni talabalarga oʻrgatishda qoʻllanilishi mumkin boʻlgan metodlar, xususan, axborot texnologiyalaridan foydalanish, vizualizatsiya va interaktiv dasturlar yordamida darslarni boyitish yoʻllari tahlil qilinadi.

Kirish. Matematikaning rivojlanishi insoniyatning kundalik hayotidan tortib, murakkab muhandislik va ilmiy hisob-kitoblarga qadar koʻplab sohalarda oʻz aksini topmoqda. Ayniqsa, geometrik masalalarni hal qilishda va toʻplamlar ustida amallarni bajarishda Minkovskiy amallari muhim oʻrin tutadi [1]. Ushbu mavzu nafaqat matematik nazariyaning asosiy qismlaridan biri hisoblanadi, balki uning amaliy koʻrinishlari koʻplab texnik va ilmiy sohalarda ham dolzarb ahamiyatga ega.

Differensial geometriya, topologiya, optimal boshqaruv masalalarida keng qoʻllaniladigan Minkovskiy operatorlari haqidagi maʼlumotlar koʻpgina ilmiy maqolalarda uchrashiga qaramasdan, biror ilmiy tadqiqotning diqqat markazida boʻlmagan[2].

Toʻplamlar ustida amallarni tushuntirishda oʻqituvchilarning zamonaviy pedagogik yondashuvlardan foydalanishi talabalar tomonidan mavzuning osonroq va samaraliroq oʻzlashtirilishini taʼminlaydi. Xususan, axborot texnologiyalaridan foydalanish va vizualizatsiya vositalari yordamida matematik tushunchalar ancha koʻrgazmali tarzda ifodalanadi. Talabalarga qiyinchilik tugʻdiradigan geometrik tushunchalar va amallarni interaktiv dasturlar orqali tushuntirish, ularda mavzuga boʻlgan qiziqishni oshiradi va bilimlarni amaliy qoʻllash koʻnikmasini shakllantiradi.

Minkovskiy amallari nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki ular sunʼiy intellekt, robototexnika, kompyuter grafikasi, mashinasozlik va boshqa koʻplab sohalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, Minkovskiy yigʻindisi robotlarning harakat trayektoriyalarini aniqlashda yoki kompyuter grafikalarida obyektlarning oʻzaro kesishishini hisoblashda qoʻllaniladi. Shuningdek, ushbu mavzu informatika va dasturlash sohalari bilan ham uzviy bogʻliq boʻlib, algoritmik yondashuvlarni oʻrgatishda muhim ahamiyatga ega[3].

Maqolaning asosiy maqsadi — Minkovskiy amallarini oʻqitishda zamonaviy metodlarni koʻrsatish va ularning oʻquv jarayonidagi samaradorligini yoritishdir. Ushbu maqsadga erishish uchun axborot texnologiyalari yordamida tashkil etilgan vizualizatsiya va interaktiv dasturlarning ahamiyati tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida zamonaviy oʻquv metodlarining amaliyotdagi samarasini baholash uchun tajribalar oʻtkazilib, natijalari ilmiy adabiyotlar bilan solishtirildi.

Soʻnggi yillarda oʻqitish jarayonida qoʻllanilayotgan innovatsion texnologiyalar va metodikalar oʻquvchilarning mavzuni oʻzlashtirishiga sezilarli taʼsir koʻrsatmoqda. Masalan, Geogebra, MATLAB va Python kabi dasturlardan foydalanish orqali talabalar nafaqat nazariy bilimlarni, balki amaliy qoʻllanma koʻnikmalarini ham oʻzlashtiradilar. Bu esa ularning mustaqil fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirishga va murakkab masalalarni mustaqil yechishga yordam beradi.

Ushbu maqolada, birinchidan, Minkovskiy amallarining matematik mazmuni yoritiladi, ikkinchidan, ushbu mavzuni oʻrgatishda qoʻllaniladigan zamonaviy metodlar va texnologiyalar tahlil qilinadi, uchinchidan, tajriba asosida olingan natijalar yoritilib, ushbu metodlarning samaradorligi haqida xulosalar chiqariladi.

Mavzuga oid adabiyotlarni koʻzdan kechirish jarayonida Minkovskiy amallarining matematik asoslari va ularning oʻquv jarayonidagi ahamiyati chuqur oʻrganildi. Xususan, Minkovskiy tomonidan kiritilgan ushbu tushuncha matematik analiz va geometriyada yangi ufqlarni ochgan boʻlsa, zamonaviy texnologiyalar yordamida uning oʻquv jarayonida qoʻllanilishi mavzuni yanada samaraliroq oʻrgatish imkonini bermoqda.

Minkovskiy yigʻindisi va ayirmasi mavzusi nafaqat maktab va oliy taʼlim tizimi uchun dolzarb, balki ushbu mavzuning amaliy jihatlari zamonaviy ilmiy-tadqiqot loyihalari uchun ham muhim ahamiyatga ega. Shu sababli ushbu mavzuni zamonaviy metodlar yordamida oʻrgatish oʻqituvchilar va tadqiqotchilarning diqqat markazida boʻlib qolmoqda.

Adabiyotlar tahlili. Minkovskiy amallari ilmiy tadqiqotlarda yordamchi vosita sifatida foydalanilgan va shu kungacha Minkovskiy yigʻindisini hisoblash algoritmlarini topish boʻyicha bir qancha ilmiy izlanishlar olib borilgan. A.Kaul, M.A.Okonnor, V.Srinivasan, M.S.Kim, K.Sugihara, D.Leven, M.Sharir, J.Mikusinski, D.Mount, R.Silverman, E.Oks [4], P.K.Agarval, E.Flato, D.Halperin, G.D.Ramkumar kabi olimlarning ishlarida tekislikdagi koʻpburchaklar Minkovskiy yigʻindisini xisoblash boʻyicha fundamental natijalar olingan.

Minkovskiy yigʻindisi ishlatiladigan koʻplab tadqiqotlarda ilmiy izlanuvchilarni turli xil algoritmlarni taklif qilish va ishlab chiqishga undadi. Fazodagi koʻpyoqlarning Minkovskiy yigʻindisi topish masalalari bilan H.Bekker, J.B.T.M.Reordinik, A.Hernandez-Barrera, G.Jorna, P.Hachenberger, H.Barki, F.Denis, M.B.Uxanov, A.V. Panyukov, P.K.Ghoshlarlar shugʻillanishgan.

Minkovskiy ayirmasi geometriyadagi asosiy tushuncha boʻlsa-da, u aniq tadqiqotchilar yoki maqolalarning diqqat markazida boʻlmagan boʻlishi mumkin. Biroq, bir qancha olimlar va matematiklar Minkovskiy amallarini, shu jumladan Minkovskiy ayirmasini, qavariq geometriya, hisoblash geometriyasi, optimallashtirish va boshqa tegishli sohalardagi ishlari orqali kengroq tushunishga hissa qoʻshdilar. K.Sugihara, Y.T.Feng, Y.Tan, S.Tomiskova, Y.Martinez-Maure, V.I.Danilov, G.A.Koshevoy, S.N.Avvakumov, Yu.N.Kiselyov, A.R.Maritnes-Fernandez, E.Saorin-Gomes, D.Barovska, J.Grzibovski, V.N.Ushakov,

[1] Mamatov M., Nuritdinov J. On the geometric properties of the Minkowski operator // International Journal of Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 37. – № 2. –pp. 175-185.
[2] M.Sh. Mamatov, J.T. Nuritdinov, Kh.Sh. Turakulov, S.M. Mamazhonov, Geometric properties of the Minkowski operator. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 4(116), 2024, pp. 127–137. https://doi.org/10.31489/2024M4/127-137
[3] Nuritdinov J. T., Kakharov S. S., Dagur A. A new algorithm for finding the Minkowski difference of some sets //Artificial Intelligence and Information Technologies. – CRC Press, 2024. – С. 142-147.
[4] Oks E., Sharir M. Minkowski Sums of Monotone and General Simple Polygons // Discrete Comput Geom. – 2006. – Vol. 35. – pp. 223–240.

Y.Yan, R.Urbanskiy, Z.R.Gabudillina[5] kabi mutaxasislarning ishlarida Minkovskiy ayirmasining bir qancha xossalari va hisoblash usullari keltirilgan.

Luis Montejanoning “Some results about Minkowski addition and difference” (Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasiga doir ba’zi natijalar) deb nomlangan maqolasida Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasining ba’zi xarakteristikalari keltirilgan. Bu maqolada muallif A va B to‘plamlar Minkovskiy ayirmasini $A\sim B$ ko‘rinishda belgilagan.

R^n fazoda berilgan qavariq to‘plamlar oilasi K^n Minkovskiy yig‘indisiga nisbatan yarim gruppa tashkil etadi. $A,B\in K^n$ qavariq to‘plamlar bo‘lsin, A to‘plamni B to‘plamning qo‘shiluvchisi deb ataymiz agar $A+M=B$ tenglikni qanoatlantiruvchi shunday $M\in K^n$ to‘plam topilsa. Huddi shu kabi, A to‘plamni B to‘plamning ayirmasi deymiz agar $B\sim M=A$ tenglikni qanoatlantiruvchi shunday $M\in K^n$ to‘plam topilsa[6].

Tadqiqot metodologiyasi. Ushbu to‘plamlar ustida bajariladigan Minkovskiy amallari mavzusini samarali va zamonaviy pedagogik usullar yordamida o‘rgatishning innovatsion metodlarini ishlab chiqishda quyidagi nazariy tahlil usullardan foydalaniladi:

Minkovskiy amallarining matematik asoslarini, ya’ni ta’riflari, xossalari, hisoblash usullari va ularning qo‘llanilish sohalarini o‘rganish;

Bu mavzuga pedagogik yondashuvlarni o‘rganish va tahlil qilish;

Zamonaviy ta’lim texnologiyalarni (masofaviy ta'lim, vizualizatsiya, interaktiv darsliklar va boshqalar) tahlil qilish va mavzuga doir tushunchalarni orgatish uchun mos texnolofiyalarni tanlash.

To‘plamlar ustidagi Minkovskiy amallari geometriya fani bilan uzviy bog‘liq bo‘lganligi sababli geometriyada ishlatiladigan usullardan va pedagogik yondashuvlardan foydalanish bu mavzuni talabalarga kengroq yoritishga imkon beradi. Dastlab Minkovskiy amallarining matematik asoslarini keltiramiz[7].

1-ta’rif. R^n fazoda bo‘sh bo‘lmagan $X,Y\subset R^n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Xva Y to‘plamlarning geometrik yig‘indisi va ayirmasi yoki Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasi deb mos ravishda quyidagi to‘plamlarga aytiladi:

$$X+Y=\{x+y: x\in X, y\in Y\},\quad X\overset{*}{-}Y=\{z\in R^n: z+Y\subset X\}. \tag{1}$$

2-ta’rif. X to‘plamni λ songa ko‘paytirish deb quyidagi to‘plamga aytiladi:

$$\lambda X=\{\lambda x: x\in X\}. \tag{2}$$

Yuqoridagi ta’rifga ko‘ra ixtiyoriy $a\in R^n$ vektor va bo‘sh bo‘lmagan $X\subset R^n$ to‘plamning Minkovskiy yig‘indisi deganda

$$a+X=\{a+x: x\in X\} \tag{3}$$

to‘plamni tushinamiz.

$X\overset{*}{-}Y$ - Minkovskiy ayirmasi bu X to‘plamning $d\in -Y$ vektorga ko‘chishlari kesishmasi ekanligi bevosita ta’rifdan kelib chiqadi, ya’ni

$$X\overset{*}{-}Y=\bigcap_{d\in -Y}(X+d). \tag{4}$$

To‘plamlar ustidagi amallarning bajarilish tartibi quyidagicha kelishib olingan. Qavs bo‘lmasa birinchi navbatda songa ko‘paytirish amali bajariladi, chapdan o‘nga qarab geometrik yig‘indi va geometrik ayirma amallaridan qaysi amal birinchi kelsa o‘sha amal bajariladi.

Tadqiqot natijalari. Yuqorida ta’riflari keltirilgan amallar mos Minkovskiy operatorlarining xususiy hollari hisoblanadi. Bu amallarning muhandislik loyihalash muammolarida, ma’lumotlar tasnifida, tasvirni tahlil qilish va qayta ishlash, robotlar harakatini rejalashtirish, real vaqtda to‘qnashuvni aniqlash, kompyuter grafikasi va boshqa ko‘plab zamonaviy sohalarga keng tadbiqlari mavjud. Bu amallarning asosiy xossalarini keltirib o‘tamiz.

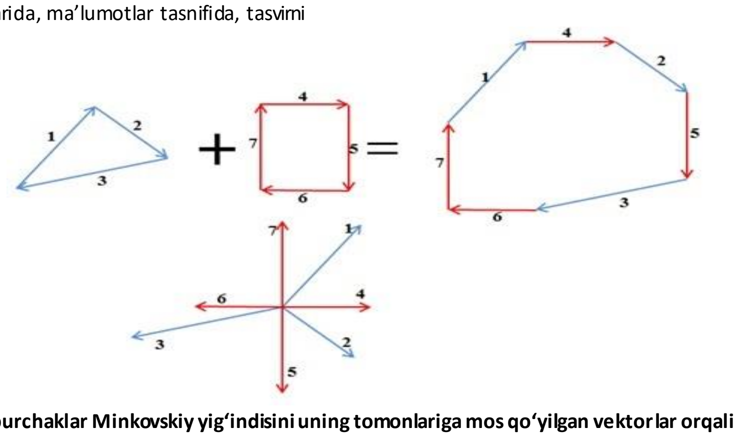
R^n fazoda bo‘sh bo‘lmagan $X, Y, Z, X_1, X_2, Y_1, Y_2$ to‘plamlar va ixtiyoriy $d_1, d_2\in R^n$ vektorlar uchun Minkovskiy ayirmasi va yig‘indisi quyidagi xossalari mavjud:

1) $X+Y=Y+X$;
2) $X+(Y+Z)=X+Y+Z$;
3) $\boldsymbol{X\overset{*}{-}(Y+Z)=X\overset{*}{-}Y\overset{*}{-}Z}$;
4) a) $\lambda(X+Y)=\lambda Y+\lambda X$;
b) $\lambda\left(X\overset{*}{-}Y\right)=\lambda Y\overset{*}{-}\lambda X$;
c) $(\lambda\mu)X=\lambda(\mu X)$;
5) $(X+d_1)\overset{*}{-}(Y+d_2)=X\overset{*}{-}Y+d_1-d_2$;
6) a) $X\overset{*}{-}Y+Y\subset X$;
b) $X\subset X+Y\overset{*}{-}Y$;
c) $Y\subset X\overset{*}{-}\left(X\overset{*}{-}Y\right)$;
7) a) agar $X\subset Y$ bo‘lsa, u holda $\lambda X\subset\lambda Y$ bo‘ladi;
b) agar $X_1\subset X_2, Y_1\subset Y_2$ bo‘lsa, u holda $X_1+Y_1\subset X_2+Y_2$ bo‘ladi;
c) agar $X_1\subset X_2, Y_1\supset Y_2$ bo‘lsa, u holda $X_1\overset{*}{-}Y_1\subset X_2\overset{*}{-}Y_2$ bo‘ladi;
8) a) $\boldsymbol{X+\left(Y\overset{*}{-}Z\right)\subset X+Y\overset{*}{-}Z}$;
b) $\boldsymbol{X+\left(Y\overset{*}{-}Z\right)\subset Y\overset{*}{-}\left(Z\overset{*}{-}X\right)}$;
9) a) $\boldsymbol{X\overset{*}{-}Y+Y\overset{*}{-}Y=X\overset{*}{-}Y}$;
b) $\boldsymbol{X+Y\overset{*}{-}Y+Y=X+Y}$;
c) $\boldsymbol{X\overset{*}{-}\left(X\overset{*}{-}\left(X\overset{*}{-}Y\right)\right)=X\overset{*}{-}Y}$;
10) a) $(X\overset{*}{-}Y)^c=-Y+X^c$;
b) $(X+Y)^c=X^c\overset{*}{-}(-Y)$;
c) $X^c\overset{*}{-}Y^c=-\left(Y\overset{*}{-}X\right)$;
11) $\boldsymbol{Y\overset{*}{-}\left(Y\overset{*}{-}X\right)=X+(-Y)^c\overset{*}{-}(-Y)^c}$;
12) a) $\boldsymbol{\left(X\overset{*}{-}Z\right)\cap\left(Y\overset{*}{-}Z\right)\subset(X\cap Y)\overset{*}{-}Z}$;
b) $\left(X\overset{*}{-}Y\right)\cap\left(X\overset{*}{-}Z\right)\subset X\overset{*}{-}(Y\cup Z)$.

Bu yerda X^c - X to‘plamning R^n fazoga to‘ldiruvchisi, ya’ni $X^c=\{x\in\mathbb{R}^n: x\notin X\}$ va λ,μ - haqiqiy sonlar[8].

Minkovskiy yig‘indisi operatsiyasi aslida tadqiqot va kontseptual vosita sifatida foydalidir. Ammo, afsuski, to‘plamlarning berilgan ixtiyoriy formalari uchun Minkovskiy yig‘indisini topish bilan bog‘liq jiddiy qiyinchiliklar mavjudligi hammaga ma’lum. Bu esa Minkovskiy yig‘indisi operatsiyasidan turli amaliy dasturlarda foydalanish uchun asosiy to‘siqdir. Shu maqsadda hozirda to‘plamlarning Minkovskiy yig‘indisi va ayirmasini topishning turli usullarini ishlab chiqishga bo‘lgan qiziqish ortib bormoqda.

G.Y.Paninaning[9] maqolasida R^2 tekislikda joylashgan ko‘pburchaklarning va R^3 fazoda joylashgan ko‘pyoqlarning Minkovskiy yig‘indisini topishning boshqa bir usuli berilgan.



1-rasm. Ko‘pburchaklar Minkovskiy yig‘indisini uning tomonlariga mos qo‘yilgan vektorlar orqali topish usuli

[5] Gabidullina Z.R. The Minkowski difference of sets with the constraint structure // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016) Moscow, October 17-22, PROCEEDINGS Volume I, 30–33 (2016).

[6] Montejano L. Some results about Minkowski addition and difference// Mathematika. 1996. №43. pp.265- 273.

[7] Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. Some Properties of the Sum and Geometric Differences of Minkowski // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2020. – Vol.8. – pp. 2241-2255.

[8] Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // Матем. заметки. 2006. Том 7. Выпуск 1. С. 60-86.

[9] Панина Г.Ю. Арифметика многогранников // Журнал “Квант”. 2009, №4, С.8-14.

Bu usulga ko‘ra tekislikda berilgan ikki P_1 va P_2 ko‘pburchaklarning Minkovskiy yig‘indisini topish uchun quyidagi amallarni ketma-ket bajarish kerak bo‘ladi:

berilgan ko‘pburchak tomonlariga parallel va uzunliklari mos tomon uzunliklariga teng vektorlarni qo‘yib chiqamiz. Vektorlar ko‘pburchakni soat yo‘nalishi bo‘ylab aylanib qoplashi lozim;

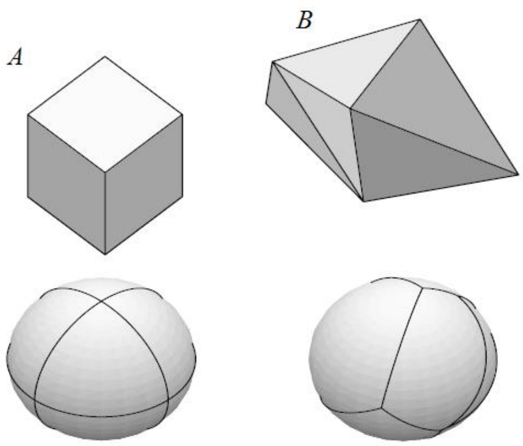
P_1 va P_2 ko‘pburchakdagi barcha vektorlarning boshlarini bir nuqtaga ko‘chiramiz va "vektorlar dastasini" hosil qilamiz;

dastadagi ikkita yoki undan ko‘p vektorlar bir xil yo‘nalishda bo‘lib qolishi mumkin. U holda bu vektorlar o‘rniga bularning yig‘indisini olamiz;

soat strelkasi harakati yo‘nalishi bo‘ylab vektorlarni birin ketin tanlab ularni “ulab” chiqamiz, ya’ni avvalgisining oxiriga keyingisining boshini qo‘yib chiqamiz (birinchi vektorni ixtiyoriy ravishda tanlaymiz). Natijada yopiq siniq chiziq hosil bo‘ladi. Bu siniq chiziq berilgan ko‘pburchaklar Minkovskiy yig‘indisining chegarasi bo‘ladi (1-rasm).

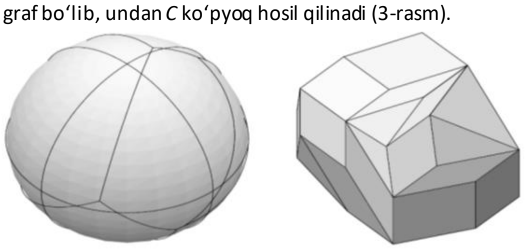
Bu usul yordamida berilgan ko‘pburchaklar shakliga qarab ularning Minkovskiy yig‘indisi natijasida hosil bo‘lgan ko‘pburchakning shaklini, uchlari sonini aniq hisoblanadi.

N.Bekker va J.B.T.M.Reordiniklarning [10] maqolasida ko‘pyoqlar Minkovskiy yig‘indisini topishning to‘rtta usuli bayon qilingan. Bu maqolada berilgan uchunchi usulga ko‘ra A va B ko‘pyoqlarni dastlab sferalar ustida joylashgan graflar ko‘rinishida tasvirlab olinadi (2-rasm) va bu graflar bitta sferada ustma-ust qo‘yiladi.



2-rasm. A va B ko‘pyoqlarning sferada joylashgan graflarga akslantirish

Natijada yangi graf hosil bo‘ladi. Bu graf $C = A + B$ ko‘pyoqqa mos graf bo‘lib, undan C ko‘pyoq hosil qilinadi (3-rasm).



3-rasm. A va B ko‘pyoqlarning Minkovskiy yig‘indisini qurish

Bu keltirilgan usullar berilgan to‘plamlar Minkovskiy ayirmasi va yig‘indisining shakli haqida ma’lumot berishi mumkin, lekin natijaning aniq geometrik joylashuvini, ya’ni hosil bo‘lgan to‘plam nuqtalarining koordinatalarini aniqlash imkonini bermaydi.

Biz olib borgan izlanishlar natijasida tekislikda berilgan ikki kvadratning Minkovskiy ayirmasini topishning yangi usulini yaratildi. Bu usul asosida uchlarining koordinatalari orqali berilgan kvadratlarning Minkovskiy ayirmasi natijasida hosil bo‘lgan to‘plam nuqtalarining aniq koordinatalarini hisoblash mumkin.

R^2 tekislikda berilgan ikki kvadratlar Minkovskiy ayirmasini topish uchun quyidagi amallarni ketma-ket bajariladi:

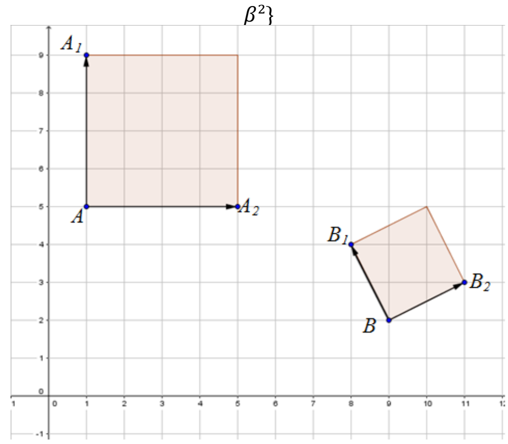
1) R^2 tekislikda kvadratni o‘zaro qo‘shni bo‘lgan uchta uchi orqali aniqlash mumkin. Shuning uchun, S^A kvadratni $A=\{\alpha^1,\alpha^2\}$, $A_1=\{\alpha_1^1,\alpha_1^2\}$, $A_2=\{\alpha_2^1,\alpha_2^2\}$ va S^B kvadratni $B=\{\beta^1,\beta^2\}$, $B_1=\{\beta_1^1,\beta_1^2\}$, $B_2=\{\beta_2^1,\beta_2^2\}$ uchlari orqali aniqlaymiz (4-rasm);

2) berilgan nuqtalar orqali kvadratlarning tomonlariga mos vektorlarni aniqlab olamiz:

$$\vec{a}_1=\overrightarrow{AA_1}=\{\alpha_1^1-\alpha^1,\alpha_1^2-\alpha^2\},\vec{a}_2=\overrightarrow{AA_2}=\{\alpha_2^1-\alpha^1,\alpha_2^2-\alpha^2\}$$

va

$$\vec{b}_1=\overrightarrow{BB_1}=\{\beta_1^1-\beta^1,\beta_1^2-\beta^2\},\vec{b}_2=\overrightarrow{BB_2}=\{\beta_2^1-\beta^1,\beta_2^2-\beta^2\}$$



4-rasm. Tekislikda kvadratlar Minkovskiy ayirmasini topish usuli

3) S^B kvadratning diogonallariga mos vektorlarni $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ vektorlar yordamida topib olamiz:

$$\vec{d}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2,$$
$$\vec{d}_2=\vec{b}_1-\vec{b}_2.$$

4) bu vektorlarni $\vec{a}_1$ vektorga ortoganal proyeksiyalarini hisoblaymiz va bu proyeksiyalar ichida eng uzunini ajratib olamiz:

$$|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_1|=\frac{|\langle\vec{a}_1,\vec{d}_1\rangle|}{|\vec{a}_1|}=\frac{(\alpha_1^1-\alpha^1)(\beta_1^1+\beta_2^1-2\beta^1)+(\alpha_1^2-\alpha^2)(\beta_1^2+\beta_2^2-2\beta^2)}{\sqrt{(\alpha_1^1-\alpha^1)^2+(\alpha_1^2-\alpha^2)^2}};$$

$$|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_2|=\frac{|\langle\vec{a}_1,\vec{d}_2\rangle|}{|\vec{a}_1|}=\frac{(\alpha_1^1-\alpha^1)(\beta_1^1-\beta_2^1)+(\alpha_1^2-\alpha^2)(\beta_1^2-\beta_2^2)}{\sqrt{(\alpha_1^1-\alpha^1)^2+(\alpha_1^2-\alpha^2)^2}}.$$

5) hosil bo‘lgan $S^A \stackrel{*}{-} S^B$ ayirmaning tomoniga mos vektorlar yo‘nalishi $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektorlar yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lib, uzunliklari esa quyidagicha hisoblanadi:

$$|\vec{c}_1|=|\vec{a}_1|-\max_{i=\overline{1,2}}|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_i|,|\vec{c}_2|=|\vec{a}_2|-\max_{i=\overline{1,2}}|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_i|.$$

6) yo‘nalishi $\vec{a}_1=\overrightarrow{AA_1}=\{\alpha_1^1-\alpha^1,\alpha_1^2-\alpha^2\}$ va uzunligi $|\vec{a}_1|-\max_{i=\overline{1,2}}|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_i|$ vektorning koordinatalarini topishimiz mumkin:

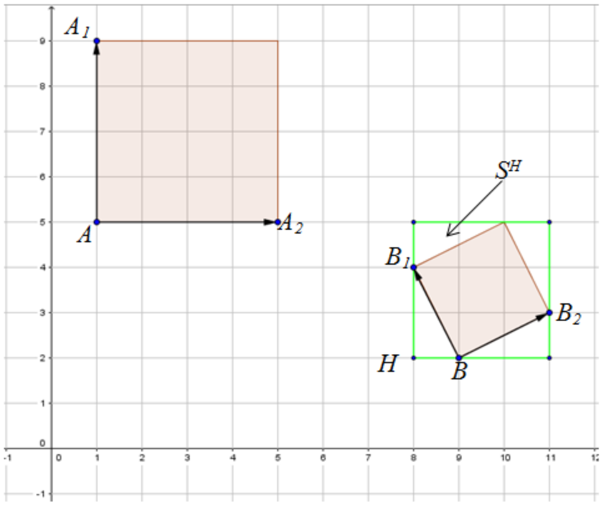
$$((\alpha_1^1-\alpha^1)^2+(\alpha_1^2-\alpha^2)^2)x^2=\left(|\vec{a}_1|-\max_{i=\overline{1,2}}|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_i|\right)^2;$$

$$|\vec{a}_1|^2x^2=|\vec{c}_1|^2,x=\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}$$

ekanligini hisobga olsak $\vec{c}_1=\left\{\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^1-\alpha^1),\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^2-\alpha^2)\right\}$ ga ega bo‘lamiz. Xuddi shu kabi, $\vec{c}_2=\left\{\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_2^1-\alpha^1),\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_2^2-\alpha^2)\right\}$ keltirib chiqaramiz.

7) bizda ayirma kvadratning tomonlariga mos vektorlar ma’lum, lekin bu kvadratni yasashimiz uchun uning bitta uchi lozim (S^A kvadratni A uchi kabi). Buning uchun S^B kvadratni o‘z ichida saqlaydigan va tomonlariga mos vektorlar $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar bilan bir xil yo‘nalgan, uzunligi $\max_{i=\overline{1,2}}|proj_{\vec{a}_1}\vec{d}_i|$ teng bo‘lgan yordamchi S^H kvadrat chizib olamiz (5-rasm).

[10] Bekker H., Roerdink J.B.T.M. An Efficient Algorithm to Calculate the Minkowski Sum of Convex 3D Polyhedra. // Computational Science — ICCS 2001. ICCS 2001. Lecture Notes in Computer Science, vol 2073. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-45545-0_71



5-rasm. Tekislikda kvadratlar Minkovskiy ayirmasini topishda yordamchi kvadratni qurish

8) yuqoridagi mulohazalardan ayonki $S^A \overset{*}{-} S^B = S^A \overset{*}{-} S^H$ tenglik o‘rinli. Shuning uchun qidirayotgan nuqtamizning koordinatasi A nuqta va H nuqta koordinatalari ayirmasiga teng bo‘ladi. Shuning uchun H nuqta koordinatasini aniqlashimiz lozim. S^H kvadratni qurilishidan ma’lumki, $\overrightarrow{HB}_1$ vektor yo‘nalishi $\vec{a}_1$ vektor yo‘nalishi bilan bir xil, uzunligi esa $\vec{b}_1$ vektorni $\vec{a}_1$ vektorga ortogonal proyeksiyasisi moduliga teng bo‘ladi, ya’ni

$$|\overrightarrow{HB}_1| = |proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1| = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{b}_1\rangle|}{|\vec{a}_1|} = \frac{|(\alpha_1^1 - \alpha^1)(\beta_1^1 - \beta^1) + (\alpha_1^2 - \alpha^2)(\beta_1^2 - \beta^2)|}{\sqrt{(\alpha_1^1 - \alpha^1)^2 + (\alpha_1^2 - \alpha^2)^2}}.$$

$\overrightarrow{HB}_1$ vektorni uzuniligi ham yo‘nalishi ham ma’lum bo‘lgani uchun uning koordinatasini quyidagicha aniqlashimiz mumkin:

$$\overrightarrow{HB}_1 = \left\{\frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^1 - \alpha^1), \frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^2 - \alpha^2)\right\}.$$

Bu vektor yordamida H nuqtaning koordinatasini topa olamiz:

$$H = \left\{(\beta_1^1 - \beta^1) - \frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^1 - \alpha^1), (\beta_1^2 - \beta^2) - \frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^2 - \alpha^2)\right\},$$

$S^A \overset{*}{-} S^B$ ayirmaga tegishli biz qidirayotgan nuqtani C deb belgilasak,

$$C = \left\{\left(1 + \frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}\right)(\alpha_1^1 - \alpha^1) - (\beta_1^1 - \beta^1), \left(1 + \frac{|proj_{\vec{a}_1}\vec{b}_1|}{|\vec{a}_1|}\right)(\alpha_1^2 - \alpha^2) - (\beta_1^2 - \beta^2)\right\}$$

koordinataga ega bo‘lamiz.

9) demak, $S^A \overset{*}{-} S^B$ ayirma natijasida hosil bo‘lgan kvadratni yasash uchun aniqlangan $\vec{c}_1 = \left\{\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^1 - \alpha^1), \frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_1^2 - \alpha^2)\right\}$, $\vec{c}_2 = \left\{\frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_2^1 - \alpha^1), \frac{|\vec{c}_1|}{|\vec{a}_1|}(\alpha_2^2 - \alpha^2)\right\}$ vektorlar boshini C nuqtaga qo‘yamiz va kvadratning qolgan uchlarining ham geometrik o‘rinlarini hosil qilamiz.

Xulosa. Mazkur maqolada to‘plamlar ustida bajariladigan Minkovskiy amallari va ularni o‘qitishda qo‘llashning zamonaviy metodlari tahlil qilindi. Tadqiqot davomida Minkovskiy yig‘indisi va farqining geometrik xossalari hamda ularning matematik modellashtirish, differensial tenglamalarni yechish va optimal boshqaruv masalalarini hal qilishdagi ahamiyati o‘rganildi.

Maqolada tekislikda uchlarining koordinatalari orqali berilgan ikki kvadratning Minkovskiy ayirmasini topish usuli va bu usul yordamida hisoblash ketma-ketligi yoritildi. Taklif etilgan bu usul natijaning aniq geometrik o‘rnini topish imkonini beradi.

Maqolada zamonaviy o‘qitish metodlaridan foydalanib, ushbu mavzuni samarali o‘zlashtirishga qaratilgan yondashuvlar taklif etildi. Jumladan, interaktiv texnologiyalar, vizual modellashtirish, hamda raqamli vositalar yordamida talabalar tomonidan mavzuning chuqur tushunilishi ta'minlanishi ko‘rsatib o‘tildi. Shuningdek, nazariy va amaliy misollar orqali Minkovskiy amallarining kundalik matematik va texnologik masalalarda qo‘llanilishi yoritildi.

Yakuniy natijalarga ko‘ra, taklif qilingan usullar Minkovskiy amallarini o‘rganish jarayonini soddalashtirish, tushunarli va samarali qilish imkonini beradi. Ushbu yondashuvlar nafaqat nazariy bilimlarni oshiradi, balki talabalar tomonidan ularning amaliy qo‘llanilish doirasini kengaytirishga xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati:

1. Mamatov M., Nuritdinov J. On the geometric properties of the Minkowski operator // International Journal of Applied Mathematics. – 2024. – Vol. 37. – № 2. – pp. 175-185.
2. Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. Some Properties of the Sum and Geometric Differences of Minkowski // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2020. – Vol.8. – pp. 2241-2255.
3. Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. On some laws for calculating the Minkovski difference and sum // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. – Vol.3. – pp. 49-59.
4. Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. Tekislikdagi ba’zi to‘plamlar Minkovskiy ayirmasining geometrik xossalari haqida // Buxoro Davlat Universiteti ilmiy axboroti jurnali. – 2020. – № 4. 15-25b.
5. Nuritdinov J. T., Kakharov S. S., Dagur A. A new algorithm for finding the Minkowski difference of some sets //Artificial Intelligence and Information Technologies. – CRC Press, 2024. – С. 142-147.
6. Nuritdinov J., Kakharov S., Tashxodjayev A. Application of Minkowski operator in artificial intelligence tasks //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing, 2024. – Т. 3244. – №. 1.
7. Oks E., Sharir M. Minkowski Sums of Monotone and General Simple Polygons // Discrete Comput Geom. – 2006. – Vol. 35. – pp. 223–240.
14.
8. Gabidullina Z.R. The Minkowski difference of sets with the constraint structure // VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016) Moscow, October 17-22, PROCEEDINGS Volume I, 30–33 (2016).
9. Montejano L. Some results about Minkowski addition and difference// Mathematika. 1996. №43. pp.265- 273.
10. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // Матем. заметки. 2006. Том 7. Выпуск 1. С. 60-86.
11. Панина Г.Ю. Арифметика многогранников // Журнал “Квант”. 2009, №4, С.8-14.
12. Bekker H., Roerdink J.B.T.M. An Efficient Algorithm to Calculate the Minkowski Sum of Convex 3D Polyhedra. // Computational Science — ICCS 2001. ICCS 2001. Lecture Notes in Computer Science, vol 2073. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-45545-0_71
13. M.Sh. Mamatov, J.T. Nuritdinov, Kh.Sh. Turakulov, S.M. Mamazhonov, Geometric properties of the Minkowski operator. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 4(116), 2024, pp. 127–137. https://doi.org/10.31489/2024M4/127-137